



TITLE:

マイクロ波を用いたベルトラミ場の
実験的検証 (オイラー方程式の数
理: カルマン渦列と非定常渦運動
100年)

AUTHOR(S):

中元, 信吾; 坂本, 久幸; 真田, 篤志; 西山, 高弘

CITATION:

中元, 信吾 ...[et al]. マイクロ波を用いたベルトラミ場の実験的検証 (オイラー方程式の数
理: カルマン渦列と非定常渦運動100年). 数理解析研究所講究録 2012, 1776: 136-148

ISSUE DATE:

2012-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171756>

RIGHT:

マイクロ波を用いたベルトラミ場の実験的検証

中元 信吾 (Shingo Nakamoto)¹, 坂本 久幸 (Hisayuki Sakamoto)²,
真田 篤志 (Atsushi Sanada)³, 西山 高弘 (Takahiro Nishiyama)⁴

山口大学 大学院 理工学研究科
(Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University)

1 はじめに

ベルトラミ場とは

$$\mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{u} \neq 0$$

を満たすベクトル場 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ のことである. この $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ は明らかに定常オイラー方程式の解となっていて, 19 世紀後半の I. S. Gromeka や E. Beltrami 以来, 20 世紀前半にかけて多くの流体力学研究者により調べられた [1], [2]. また, その後は流体力学に限らず, プラズマ物理や物性物理の分野でも “force-free field” の名で多くの研究がなされている [3]. ベルトラミ場の最も簡単な例として, 定数 $k (\neq 0)$ に対する $\mathbf{u} = (\cos kz, \sin kz, 0)$ が挙げられる. 実際,

$$\text{rot} \begin{pmatrix} \cos kz \\ \sin kz \\ 0 \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} \cos kz \\ \sin kz \\ 0 \end{pmatrix}$$

より, $\mathbf{u}/\text{rot } \mathbf{u}$ が確かめられる.

流体力学分野では, ベルトラミ場を構成し, 制御, 更には応用することは困難である. 一方, 電磁気学分野で知られているベルトラミ場は実現・応用できる可能性が比較的高い. このうち, マクスウェル方程式の \mathbf{E}/\mathbf{H} 解でもあるベルトラミ定在波は, 1960 年代以降 “twisted mode” の名でレーザー共振器の原理として実際に利用されてきた [4]–[8]. ただ, レーザー光においてベルトラミ定在波が本当に実現できているかを検証するのは, その波長の短さゆえ難しい. そこで, 我々はマイクロ波の波長帯でアンテナ (波源) を設計・作製し, ベルトラミ定在波が実現されていることを測定して確かめた. 本論文はその報告である.

¹数理解析専攻 博士前期課程

²電子デバイス工学専攻 博士前期課程

³量子デバイス工学分野 (工学部工学基礎教育)

⁴応用数理解析分野 (工学部工学基礎教育)

2 マクスウェル方程式のベルトラミ場解

2.1 円偏波とベルトラミ場解

電磁場におけるベルトラミ場として円偏波の電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} が挙げられる。それらは、マクスウェル方程式

$$\epsilon \dot{\mathbf{E}} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad \mu \dot{\mathbf{H}} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1)$$

の解として

$$\mathbf{E} = A \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = A \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と書ける。ここで、 A は正の定数、また k と ω の間には $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ が成り立っている。(2) の \mathbf{E} と \mathbf{H} それぞれがベルトラミ場というのは、 t を定数として見た場合においてである。(2) の \mathbf{E} も \mathbf{H} も t を変数とする非定常オイラー方程式の解とはなっていない。(回転系では解となっている [9, § 5].)

以後、(2) のような、各 t においてベルトラミ場である (1) の解 \mathbf{E} と \mathbf{H} の組をベルトラミ場解と呼ぶ。

2.2 ベルトラミ定在波

本論文の主役であるベルトラミ定在波について考える。[10] にもある通り、(1) が

$$\mathbf{E} = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cos \omega t, \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \sin \omega t \quad (\text{rot } \mathbf{V} = -k\mathbf{V}) \quad (3)$$

なる定在波解をもつことは容易に確かめられる。(3) も (1) のベルトラミ場解であるので、(3) をベルトラミ定在波と呼ぶことにする。(3) の電気力線あるいは磁力線は、 \mathbf{V} を流体の速度として見たときの流線に対応している。このことから、(2) と比べ、(3) は流体力学に深く関連していると言える。しかも、(3) においては $\mathbf{E} // \mathbf{H}$ が成り立ち、ポインティングベクトルがゼロである。(3) の最も簡単な例として

$$\mathbf{E} = A \begin{pmatrix} \cos kz \\ \sin kz \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega t, \quad \mathbf{H} = A \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{pmatrix} \cos kz \\ \sin kz \\ 0 \end{pmatrix} \sin \omega t \quad (4)$$

が挙げられる。§ 1 でも述べたように、この (4) は 1960 年代には既に “twisted mode” の名で知られていた [4].

2.3 マクスウェル方程式の \mathbf{E}/\mathbf{H} 解

ここで, (1) のベルトラミ場解と \mathbf{E}/\mathbf{H} 解の関係について述べたい. (1) の \mathbf{E}/\mathbf{H} 解は 1980 年代にいくつかの論文で議論され, その数学的構造が解明された [10]–[13]. このうち, [12] によれば, \mathbf{E}/\mathbf{H} 解の一般形は

$$\mathbf{E} = \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \cos f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \sin f(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\text{rot} \mathbf{W} = -\sqrt{\varepsilon\mu} \dot{f} \mathbf{W}, \quad \text{div} \mathbf{W} = 0, \quad \sqrt{\varepsilon\mu} \dot{\mathbf{W}} = -\mathbf{W} \times \text{grad} f, \quad \mathbf{W} \cdot \text{grad} f = 0 \quad (6)$$

と表される. ベルトラミ定在波 (3) は $\mathbf{W} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ および $f = \omega t$ なる特別な場合である. (6) の第 1, 2 式により, $\text{rot} \mathbf{W} \neq 0$ である限り, 各 t で \mathbf{W} はベルトラミ場である. しかし, (5) と (6) から

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\sqrt{\varepsilon\mu} \dot{\mathbf{W}} \sin f - \sqrt{\varepsilon\mu} \dot{f} \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \dot{\mathbf{W}} \cos f - \sqrt{\varepsilon\mu} \dot{f} \mathbf{H}$$

が導かれるので, $\dot{\mathbf{W}} = 0$ の場合を除き, (5) はベルトラミ場解ではない (なぜなら, (6) の第 3 式によって $\dot{\mathbf{W}} \perp \mathbf{W}$ だから). $\dot{\mathbf{W}} = 0$ の場合は, (5) は (3) の形となる [12, § 3, case II]. 即ち, \mathbf{E} と \mathbf{H} がベルトラミ場解かつ \mathbf{E}/\mathbf{H} 解となるのは (3) の形になるときに限られる. 図 1 はベルトラミ場解と \mathbf{E}/\mathbf{H} 解の関係をまとめたものである. ただし, 回転平面定在波については § 3 を参照のこと.

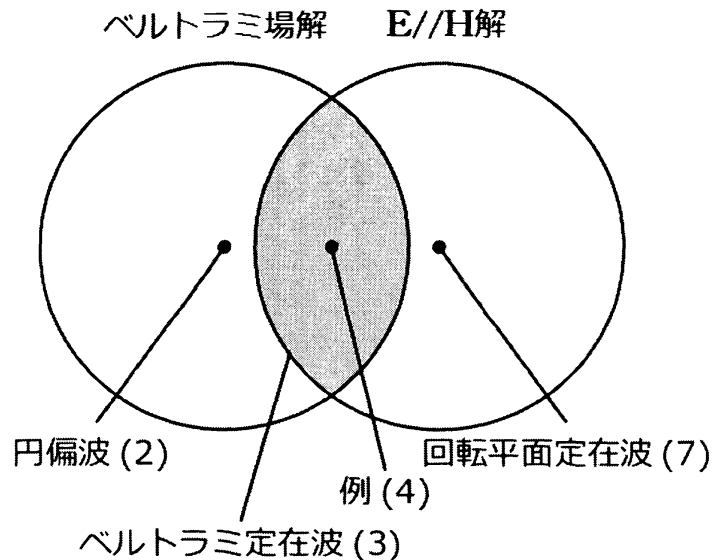


図 1: (1) のベルトラミ場解と \mathbf{E}/\mathbf{H} 解の関係

3 円偏波の合成によるベルトラミ定在波と回転平面定在波

ベルトラミ定在波の例 (4) のうち、例えば \mathbf{E} は

$$\mathbf{E} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(kz + \omega t) \\ \sin(kz + \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。これは、(4) が逆方向に進む左旋または右旋円偏波どうし (同振幅) の合成により実現可能であることを意味する。ここで、左旋円偏波とは伝搬方向に左ねじ回転で進む円偏波 (即ち $k > 0, \omega > 0$) を指し、右旋円偏波とは右ねじ回転で進む円偏波 (即ち $k < 0, \omega < 0$) を指す。

(4) の比較対象として、(5) で $\mathbf{W} = A(\sin \omega t, -\cos \omega t, 0)$, $f = kz + \pi/2$ と置いて得られる \mathbf{E}/\mathbf{H} 解:

$$\mathbf{E} = -A \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ -\cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \sin kz, \quad \mathbf{H} = A \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ -\cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \cos kz \quad (7)$$

を考える。この \mathbf{E} と \mathbf{H} は、 z 軸の周りを角速度 ω で回転する平面に平行なベクトル場を表すので、(7) を回転平面定在波と呼ぶことにする。(7) がベルトラミ場解でないことは容易にわかる。また、

$$\mathbf{E} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} -\cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \cos(kz + \omega t) \\ \sin(kz + \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書けることから、(7) は左旋円偏波と右旋円偏波の重ね合わせにより実現可能である。なお、(4) と同様、(7) も 1960 年代には既に知られていた [14, pp. 47-48]。

4 ベルトラミ定在波の実証実験

4.1 実験装置

§ 3 で述べたように、ベルトラミ定在波 (4) と回転平面定在波 (7) は 2 つの円偏波の重ね合わせにより実現可能である。そこで、円偏波アンテナ、反射板、電界プローブと磁界プローブから成る装置 (図 2) を作り、それらの実現を試みた。装置の仕組みは、円偏波アンテナから放射した円偏波を反射板に当て、入射波と反射波の重ね合わせで (4) または (7) の定在波を発生させ、その電磁場の振幅と位相をプローブで測定するというものである。なお、円偏波アンテナと反射板の距離は 381mm である。

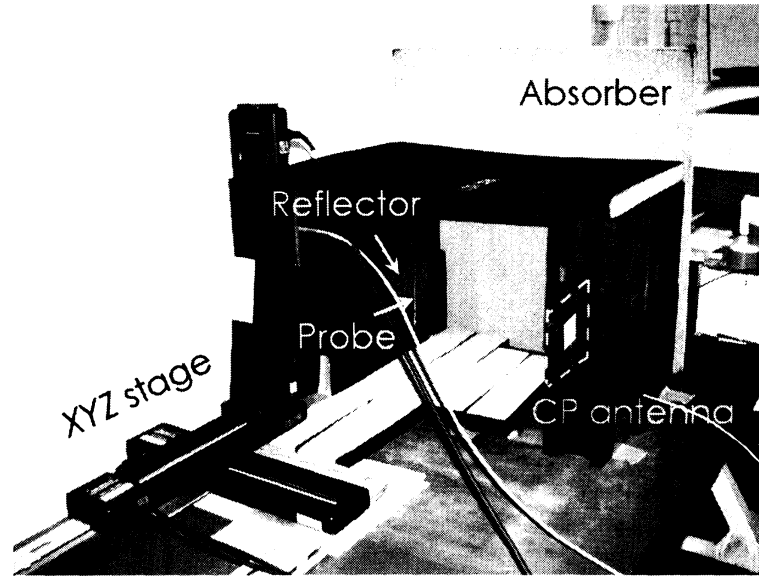


図 2: 実験装置

実験で使用した円偏波アンテナ (図 3) は、周波数 10.0GHz で動作し、右旋円偏波を放射するように設計した。即ち、 $\omega = -2\pi(10.0 \times 10^9) = -6.28 \times 10^{10}\text{s}^{-1}$, $k = \omega/(3.00 \times 10^8) = -2.09 \times 10^2\text{m}^{-1}$ である。因みに、アンテナの 1 辺のサイズは 9.77mm である。

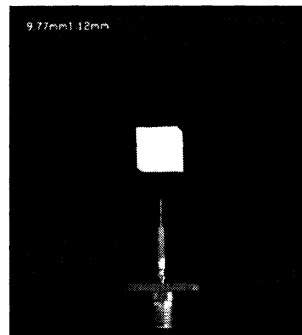


図 3: 円偏波アンテナ

また、(4) の実現のために使用する反射板として、 $\frac{1}{4}$ 波長の深さ (7.5mm) の溝が波長より十分短い間隔 (4.0mm) で並んだコルゲートリフレクタを設計・作製した (図 4)。それに右旋円偏波を当てた場合、反射波もまた右旋円偏波となる。これは、溝を切った方向に平行な電場成分が溝の上部 (凸面) で固定端反射するのに対し、垂直な電場成分は溝の奥 (凹面) で固定端反射するため、それらの成分間に $\frac{1}{2}$ 波長分の伝搬距離差ができることによる。一方、溝の無いフラットリフレクタでは、右旋円偏波は左旋円偏波となって反射するため、それを (7) の実現のために使った。

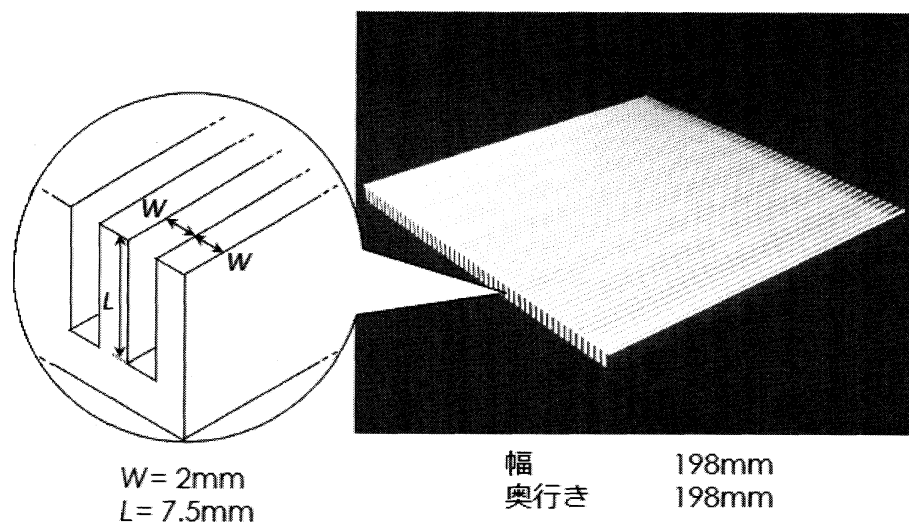


図 4: コルゲートリフレクタ

4.2 電磁場分布測定結果

(4) の実証実験における電磁場の振幅と位相の測定結果を図 5-8 に示す. 横軸の目盛りは位置 (コルゲートリフレクタの凸面からの距離) を表していて, (4) 中の z 座標に相当する. 理論的には, E_x と H_x の振幅は $|\cos kz|$, E_y と H_y の振幅は $|\sin kz|$ に比例した値 (縦軸の目盛りでは $20 \log_{10} |\cos kz|$ と $20 \log_{10} |\sin kz|$ の値) となるはずであるが, 果たして図 5, 6 中の実験データもそれに沿った結果となっている.

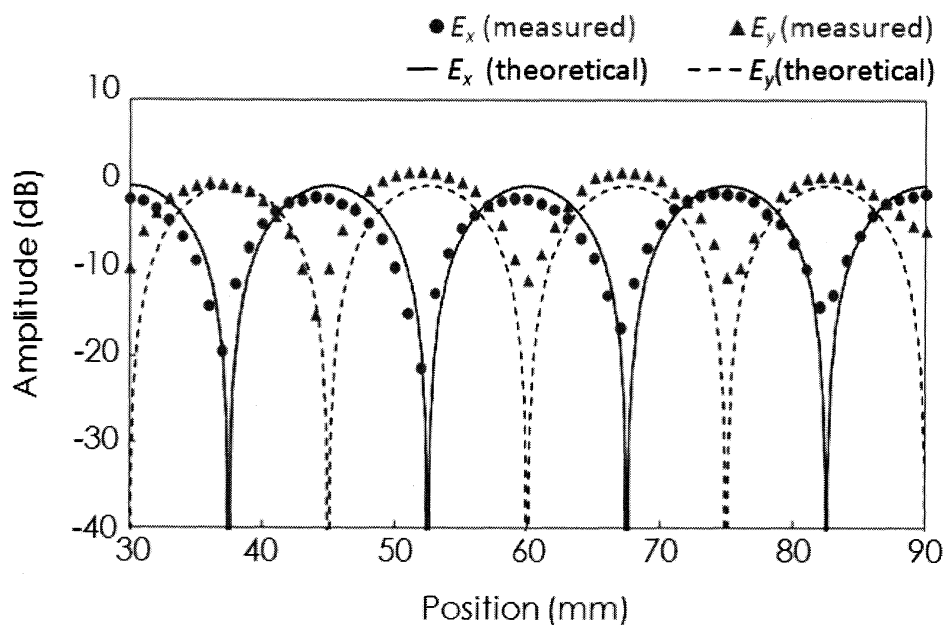


図 5: (4) の実証実験における電場の振幅

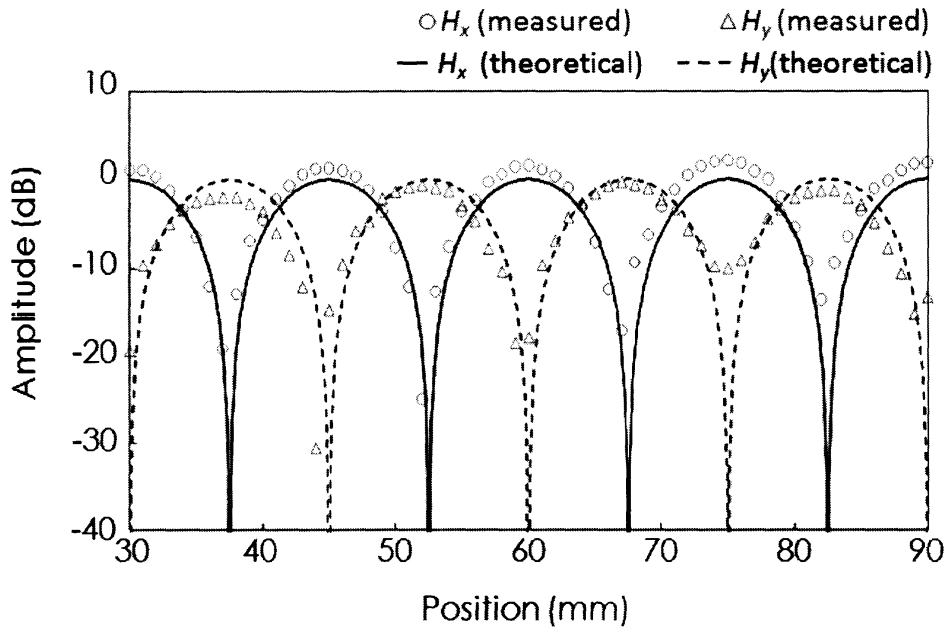


図 6: (4) の実証実験における磁場の振幅

図 7, 8 のプロットは, 各 z における電磁場が $\cos(|\omega|(t-t_0) + \phi(z))$ 即ち $\cos(\omega(t-t_0) - \phi(z))$ に比例して振動するときの $\phi(z)$ を表している. ただし, t_0 はある基準の時刻であり, 電場の測定と磁場の測定で値が異なる. 以後, 電場 (resp. 磁場) における定数 $-\omega t_0$ を ϕ_0 (resp. ψ_0) と置く. (4) の E_x は

$$A \cos kz \cos \omega t = A |\cos kz| \frac{\cos kz}{|\cos kz|} \cos \omega t = A |\cos kz| \cos(\omega t + \phi_0 - \phi)$$

と表されるから, 理論上は

$$\phi(E_x; z) = \begin{cases} \phi_0 & (\cos kz > 0 \text{ のとき}) \\ \phi_0 \pm \pi & (\cos kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる. 同様に

$$\phi(E_y; z) = \begin{cases} \phi_0 & (\sin kz > 0 \text{ のとき}) \\ \phi_0 \pm \pi & (\sin kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\phi(H_x; z) = \begin{cases} \psi_0 + \pi/2 & (\cos kz > 0 \text{ のとき}) \\ \psi_0 + \pi/2 \pm \pi & (\cos kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\phi(H_y; z) = \begin{cases} \psi_0 + \pi/2 & (\sin kz > 0 \text{ のとき}) \\ \psi_0 + \pi/2 \pm \pi & (\sin kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる矩形波状のグラフで表される理論式を得る (ϕ_0, ψ_0 の値は実験データから推定する). $\cos kz$ と $\sin kz$ の正負については図9を参照のこと. 図7, 8における実験データは矩形波に若干の傾きが加わったプロットを示しているが, ほぼ理論を裏付けるものとなっている. 以上より, (4)の実現を確認したと結論付けることができる.

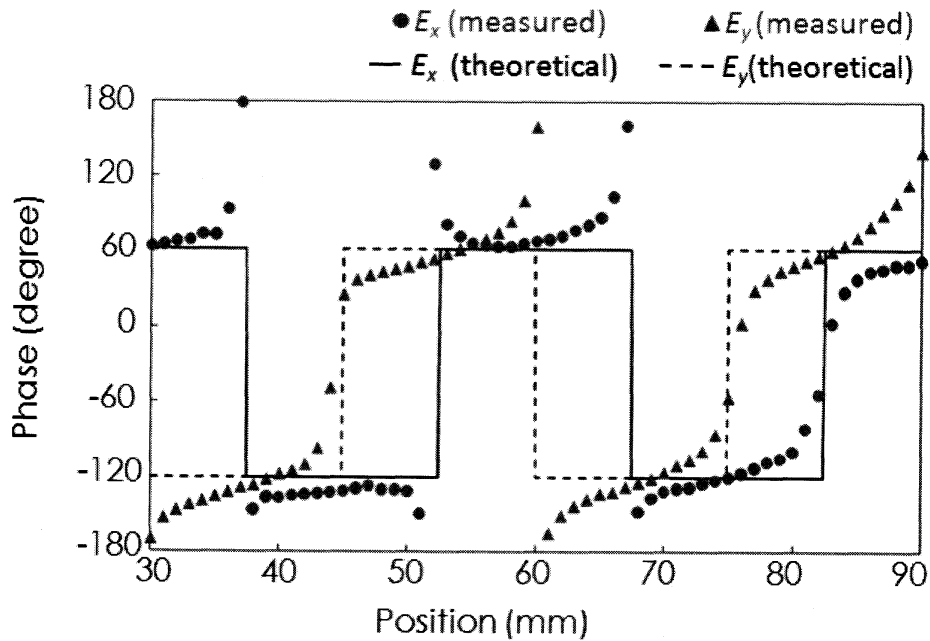


図 7: (4) の実証実験における電場の位相

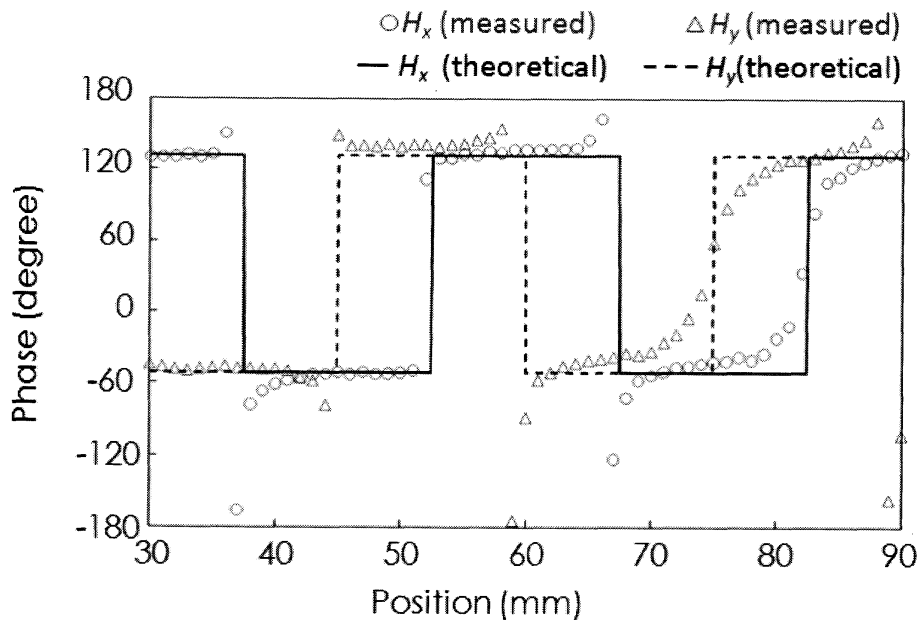


図 8: (4) の実証実験における磁場の位相

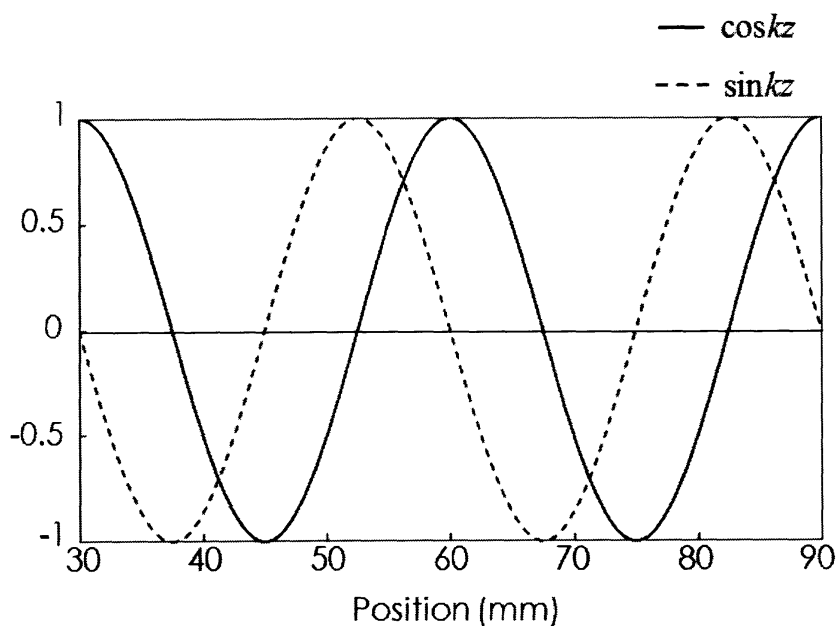


図 9: $\cos kz$, $\sin kz$ の値

(7) の実証実験における電磁場の振幅と位相の測定結果を図 10–13 に示す。横軸の目盛りはフラットリフレクタからの距離を表していて、(7) 中の z 座標に相当する。理論的には、 E_x と E_y の振幅は $|\sin kz|$ 、 H_x と H_y の振幅は $|\cos kz|$ に比例した値 (縦軸の目盛りでは $20 \log_{10} |\sin kz|$ と $20 \log_{10} |\cos kz|$ の値) となるべきだが、果たして図 10, 11 はそれに沿った測定結果を示している。

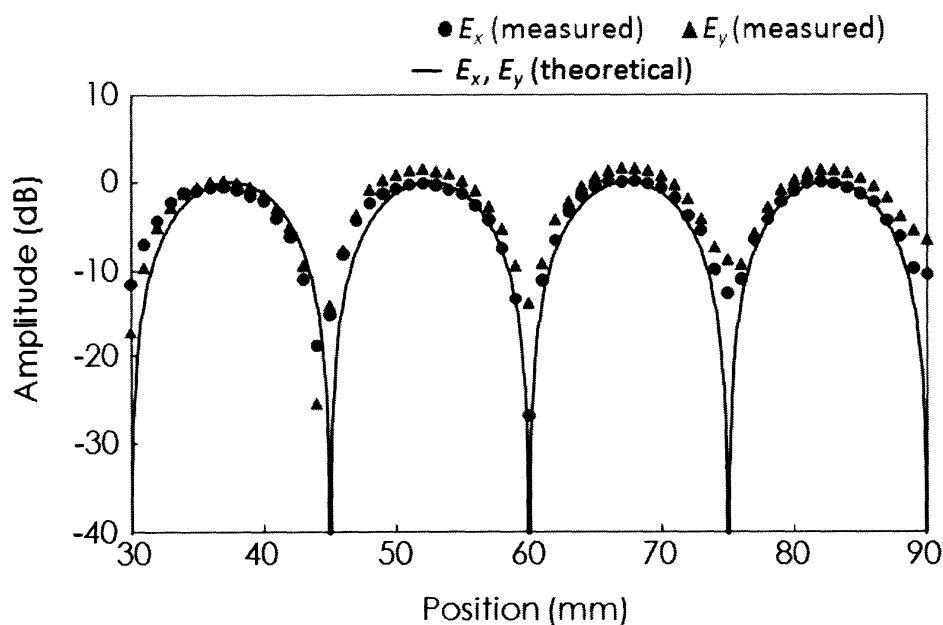


図 10: (7) の実証実験における電場の振幅

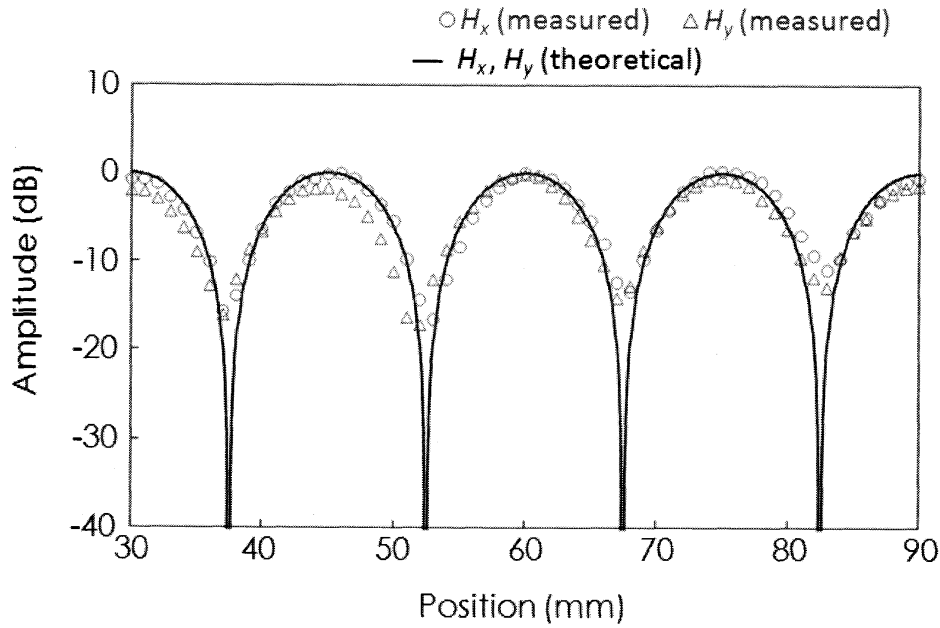


図 11: (7) の実証実験における磁場の振幅

(7) の位相の理論式を (4) のときと同様に求めると

$$\phi(E_x; z) = \begin{cases} \phi_0 + \pi/2 \pm \pi & (\sin kz > 0 \text{ のとき}) \\ \phi_0 + \pi/2 & (\sin kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\phi(E_y; z) = \begin{cases} \phi_0 & (\sin kz > 0 \text{ のとき}) \\ \phi_0 \pm \pi & (\sin kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\phi(H_x; z) = \begin{cases} \psi_0 + \pi/2 & (\cos kz > 0 \text{ のとき}) \\ \psi_0 + \pi/2 \pm \pi & (\cos kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\phi(H_y; z) = \begin{cases} \psi_0 \pm \pi & (\cos kz > 0 \text{ のとき}) \\ \psi_0 & (\cos kz < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となり、いずれも矩形波状のグラフで表される。図 12, 13 における実験データは矩形波に若干の傾きが加わったプロットとなっているが、ほぼ理論を裏付けている。以上より、(7) の実現を確認したと結論できる。

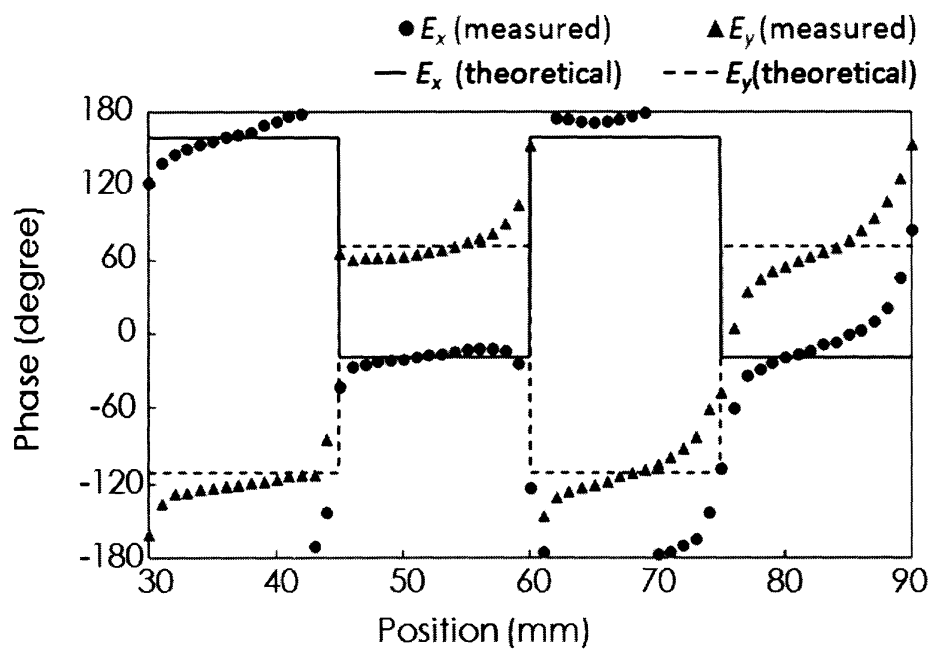


図 12: (7) の実証実験における電場の位相

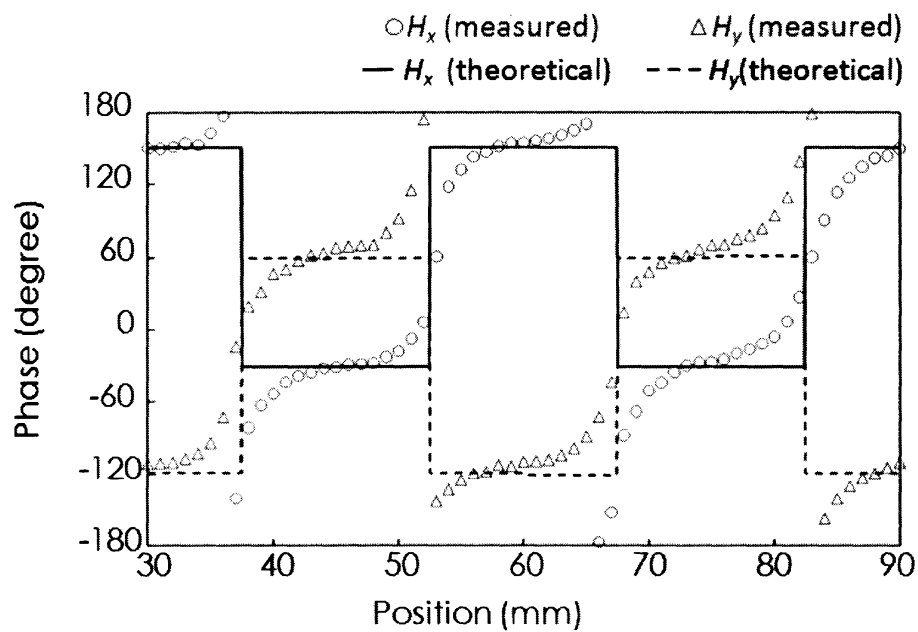


図 13: (7) の実証実験における磁場の位相

5 まとめ

ベルトラミ定在波 (3) の最大の特徴は, $\mathbf{E} // \mathbf{H}$ となる (ポインティングベクトルがゼロとなる) こと, 更に $\text{rot } \mathbf{V} = -k\mathbf{V}$ の線形性によって k が同じ (周波数が同じ) ならば重ね合わせても $\mathbf{E} // \mathbf{H}$ が保たれることである. それに比べ, 回転平面定在波 (7) は (回転軸が一致しない限り) 重ね合わせると $\mathbf{E} // \mathbf{H}$ が崩れてしまう. ベルトラミ定在波の最も簡単な例 (4) は, 反対向きに伝搬する同旋回方向, 同振幅の円偏波の合成で実現可能である. そこで, 円偏波アンテナと反射板を設計・作製し, 実際に (4) ができていることを確認した. また, (7) の実現も同様に確認した.

参考文献

- [1] O. Bjørgum, *On Beltrami vector fields and flows, Part I*, Univ. Bergen Årbok, Naturv. Rekke 1, 1–86 (1951).
- [2] O. Bjørgum and T. Godal, *On Beltrami vector fields and flows, Part II*, Univ. Bergen Årbok, Naturv. Rekke 13, 1–64 (1952).
- [3] G. Marsh, *Force-Free Magnetic Fields*, World Scientific, 1996.
- [4] V. Evtuhov and A. E. Siegman, A “twisted-mode” technique for obtaining axially uniform energy density in a laser cavity, *Appl. Opt.* 4, 142–143 (1965).
- [5] D. J. De Jong and D. Andreou, An Nd:YAG laser whose active medium experiences no hole burning effects, *Opt. Commun.* 22, 138–142 (1977).
- [6] K. Wallmeroth, *Monolithic integrated Nd:YAG laser*, *Opt. Lett.* 15, 903–905 (1990).
- [7] F. Bretenaker and A. Le Floch, *Nonlinear intensity effects in a laser generating the three main standing waves*, *Phys. Rev. A* 43, 3704–3709 (1991).
- [8] C. S. Adams, J. Vorberg and J. Mlynek, *Single-frequency operation of a diode-pumped lanthanum-neodymium-hexaaluminate laser by using a twisted-mode cavity*, *Opt. Lett.* 18, 420–422 (1993).
- [9] H. K. Moffatt and M. R. E. Proctor, *Topological constraints associated with fast dynamo action*, *J. Fluid Mech.* 154, 493–507 (1985).
- [10] C. Chu and T. Ohkawa, *Transverse electromagnetic waves with $\vec{\mathbf{E}} \parallel \vec{\mathbf{B}}$* , *Phys. Rev. Lett.* 48, 837–838 (1982).

- [11] H. Zaghoul and H. A. Buckmaster, *Transverse electromagnetic standing waves with $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$* , Am. J. Phys. **56**, 801–806 (1988); Erratum: Am. J. Phys. **57**, 183 (1989).
- [12] K. Uehara, T. Kawai and K. Shimoda, *Non-transverse electromagnetic waves with parallel electric and magnetic fields*, J. Phys. Soc. Japan **58**, 3570–3575 (1989).
- [13] K. Shimoda, T. Kawai and K. Uehara, *Electromagnetic plane waves with parallel electric and magnetic fields $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$ in free space*, Am. J. Phys. **58**, 394–396 (1990).
- [14] R. F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, 1961.